

Le modèle exponentiel

Modèles démographiques - Chapitre 3

1. Un exemple d'évolution exponentielle

À partir des documents 1 et 2 p 266 du manuel (Belin (2020)), on s'intéresse à l'évolution de la population du mélibée. Les calculs effectués dans le document 2 montrent que l'effectif d'insectes $N(n)$ l'année n vérifie la **relation de récurrence** suivante :

$$N(n + 1) = 1,4N(n) \tag{1}$$

Cette relation permet de compléter le tableau suivant :

Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$N(n)$	100	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Nous obtenons le nuage de points suivant :

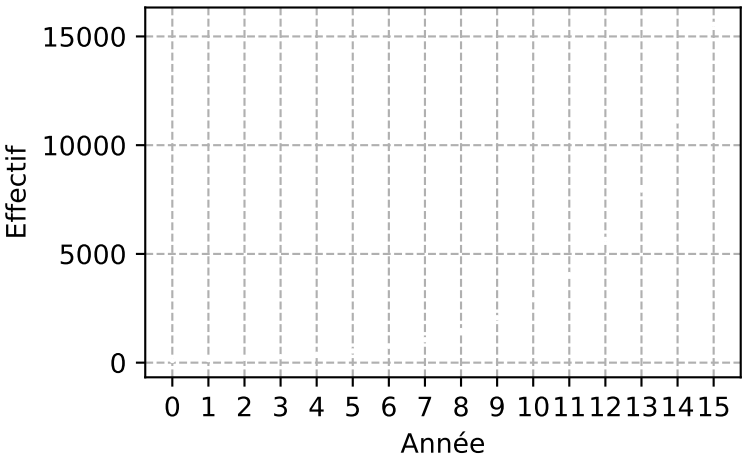


Figure 1: Evolution de la population du mélibée

L'observation de ce nuage de point permet de se convaincre qu'un modèle linéaire n'est pas adapté à cette situation, puisque les points ne sont pas alignés. De même, un calcul rapide permet de constater que les variations absolues $N(n + 1) - N(n)$ ne sont pas constantes. En effet, on a $N(1) - N(0) = \dots\dots$ et $N(6) - N(5) = \dots\dots$

La formule ci-dessus (Éq. 1) montre que l'on obtient l'effectif d'une année en **multipliant** l'effectif de l'année précédente par le coefficient multiplicateur 1,4. L'évolution de la population du mélibée se caractérise donc par un **coefficient multiplicateur constant** et donc un **taux de variation constant** d'une période à l'autre. On parle alors de **croissance exponentielle**.

2. Modèle exponentiel discret

Définition : Modèle exponentiel

Le modèle exponentiel est le modèle utilisé pour décrire un phénomène d'évolution dont le taux de variation t est constant d'une période à l'autre. Il est caractérisé par un coefficient multiplicateur C constant.

Un **modèle mathématique discret** pour cette évolution peut alors être défini par une **suite géométrique**.

Par exemple, dans le cas du mélibée, nous avons défini :

- $N(0) = 100$: effectif initial
- Pour tout entier naturel n , on note $N(n)$ l'effectif après n années d'observation. On a la relation : $N(n+1) = 1,4N(n)$.

Définition : Suite géométrique

On dit qu'une suite de nombres $(u(n))$ est **géométrique** (ou qu'elle est en progression géométrique) lorsque chaque terme de cette suite s'obtient en **multipliant** le précédent par un **même nombre** q appelé **raison**.

$$u(n+1) = q \times u(n)$$

Une telle suite étant définie, il est possible de calculer directement la valeur de $u(n)$ pour tout entier naturel n :

À savoir

Soit $(u(n))$ une suite géométrique de raison q et de premier terme $u(0)$. Alors pour tout entier naturel n , on a :

$$u(n) = u(0) \times q^n$$

Application : Dans le cas du mélibée, on a $u(0) = 100$ et $q = 1,4$. On peut donc calculer directement la valeur de $u(n)$ pour tout entier naturel n : $u(n) = \dots$

Après 20 ans d'observation, on a donc $u(20) = \dots$

Après 50 ans d'observation, on a donc $u(50) = \dots$

Important

- On utilise un modèle exponentiel lorsque deux valeurs séparées par un même intervalle de temps sont **multipliées par un même nombre**. Cela correspond à une évolution à **taux de variation constant**.
- Le modèle exponentiel est valable pour une phase de croissance dans laquelle les ressources sont disponibles sans limites. Il n'est en général, **pas valable dans le temps long**.

Sources utilisées

Belin, éd. 2020. *Enseignement scientifique Terminale*.