

Le modèle linéaire

Modèles démographiques - Chapitre 2

1. Introduction : Notion de modèle

Considérons un phénomène naturel, par exemple la croissance d'une population. On peut représenter l'évolution de cette population au cours du temps par un graphique dans lequel les données connues sont représentées.

Prenons par exemple l'évolution de la population de la ville de Paris entre 1968 et 2020. Les données connues sont consignées dans le tableau ci-dessous (source : Wikipédia (2023)).

Année	Population
1968	2 590 771
1975	2 299 830
1982	2 176 243
1990	2 152 423
1999	2 125 246
2008	2 211 297
2013	2 229 621
2019	2 165 423
2020	2 145 906

On peut représenter ces données par un graphique en **nuage de points** (Figure 1).

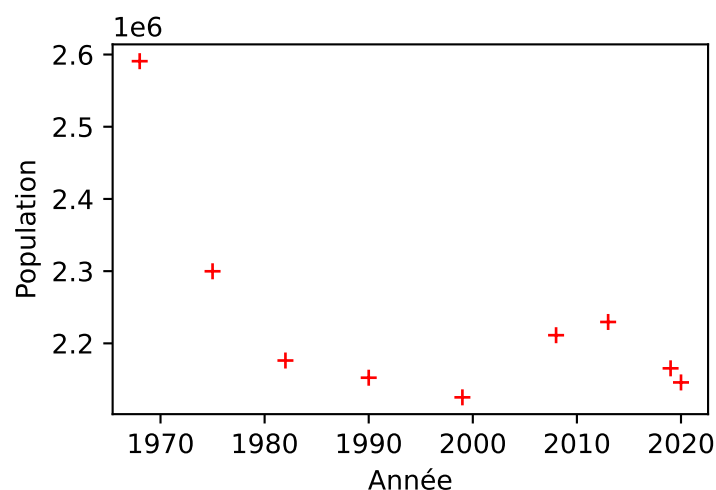


Figure 1: Graphique de la population de Paris

Modéliser cette évolution, c'est chercher à représenter cette évolution par une **fonction mathématique**. Une telle fonction, si elle existe, permettra de prédire l'évolution de la population de Paris à une date ultérieure.

On peut représenter cette fonction par un graphique en **courbe** (Figure 2).

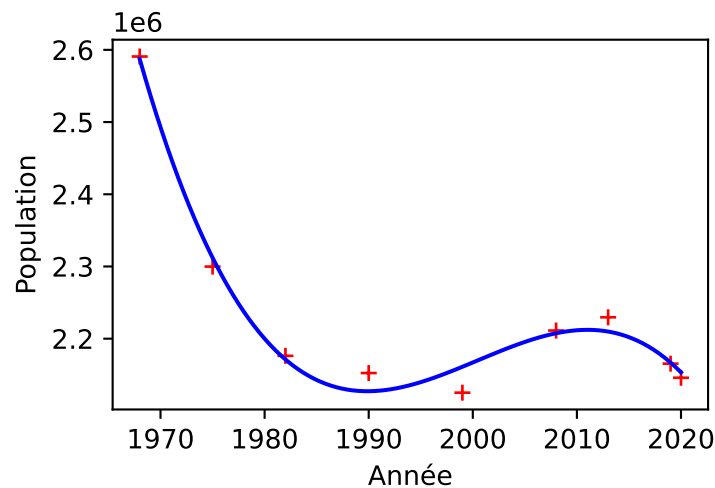


Figure 2: Modèle pour la population de Paris

Comme on peut le voir (Figure 2), un modèle n'est jamais parfait. Il y a souvent une différence entre les valeurs observées et les valeurs prédites par le modèle. Quand ces erreurs sont trop importantes, on recherche un meilleur modèle.

On dit qu'un modèle est **discret** lorsque la fonction mathématique qui le définit est définie par une **suite** de valeurs numériques, représentée par un nuage de points.

On dit qu'un modèle est **continu** lorsque la fonction mathématique qui le définit est définie par une fonction mathématique continue, représentée par une courbe.

2. Modèle linéaire discret : suites arithmétiques

💡 Définition : Modèle linéaire

Le modèle linéaire est le modèle utilisé pour décrire un phénomène d'évolution lorsque la variation absolue Δ d'un palier à l'autre est *presque* constante.

Considérons l'évolution de la population française entre 1982 et 2002 (Figure 3, source : Insee (2020)).

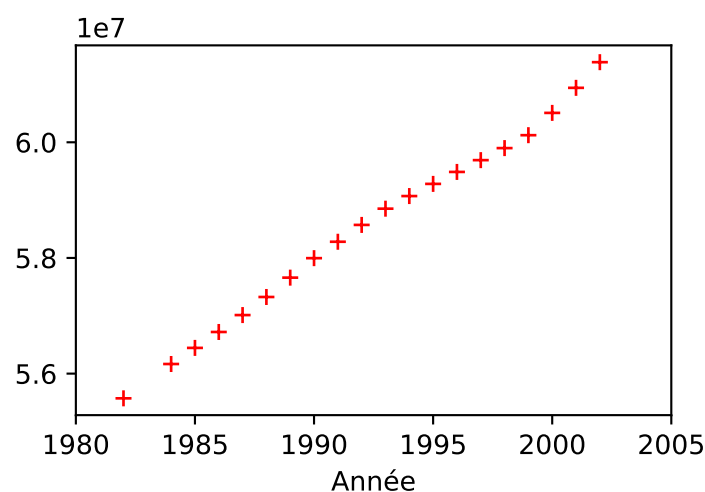


Figure 3: Population française

Nous pouvons observer que les points du nuage sont presque alignés. Un modèle linéaire est donc envisageable pour représenter cette évolution.

Observons la table des valeurs ainsi que les variations absolues entre deux paliers consécutifs :

Année	Population	Variation absolue
1982	55 572 624	X
1984	56 166 175	X
1985	56 444 748	283 273
1986	56 719 935	275 187
1987	57 012 268	292 333
1988	57 325 053	312 785
1989	57 659 542	334 485
1990	57 996 401	336 859
1991	58 280 135	283 734
1992	58 571 237	291 102
1993	58 852 002	280 765
1994	59 070 077	218 075
1995	59 280 577	210 500
1996	59 487 413	206 836
1997	59 691 177	203 764
1998	59 899 347	208 170
1999	60 122 665	223 318
2000	60 508 150	485 485
2001	60 941 410	433 260
2002	61 385 070	443 660

On constate que la variation absolue est **presque** constante : il y a des différences, mais **l'ordre de grandeur** reste le même. En moyenne, la variation absolue est de 300 000 personnes environ.

Un modèle mathématique discret pour cette évolution peut alors être défini par une **suite arithmétique** ($u(n)$) en posant :

- $u(0) = 55\,572\,624$: population en 1982.
- Pour tout entier naturel n , on note $u(n)$ la population l'année $1982 + n$. On a alors la relation :

$$u(n+1) = u(n) + 300\,000$$

Définition : Suite arithmétique

On dit qu'une suite de nombres est **arithmétique** (ou qu'elle est en **progression arithmétique**) lorsque chaque terme de cette suite s'obtient en ajoutant le même nombre (appelé la **raison**) au précédent.

$$u(n+1) = u(n) + r$$

Une telle suite étant définie, il est possible de calculer directement la valeur de $u(n)$ pour tout entier naturel n :

! À savoir

Soit $(u(n))$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u(0)$. Alors, pour tout entier naturel n , on a :

$$u(n) = u(0) + nr$$

Application : le modèle peut être utilisé pour prédire la population en 2005. En 2005, la valeur de n est de $1982 - 2005 = 23$. On calcule donc $u(23) = 55\,572\,624 + 23 \times 300\,000 = 62\,472\,624$. Selon ce modèle, la population française en 2005 est de 62 472 624 habitants.

En réalité, nous savons (d'après Insee (2020)) que la population française en 2005 était de 62 730 537 habitants, ce qui représente une différence de 257 913 habitants par rapport au modèle, soit environ 0,4%.

3. Modèle linéaire continu : fonctions affines

Rechercher un **modèle linéaire continu**, c'est rechercher une **fonction affine** qui permet de représenter la variation de la population française entre 1982 et 2002, c'est-à-dire une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ dont la droite représentative est la plus proche possible des points du nuage.

À partir d'un nuage de points, d'un tableau de valeurs, on peut, à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, déterminer une fonction affine dont la courbe représentative est une droite qui représente de façon optimale, dans un certain sens, le nuage de points. Une telle droite est appelée **droite de régression**.

À l'aide d'un tableur par exemple, nous obtenons l'équation suivante pour la droite de régression du nuage de points représentant l'évolution de la population française entre 1982 et 2002, au sens **des moindres carrés** :

$$f(x) = 275\,695x - 490\,759\,659$$

Application : le modèle peut être utilisé pour prédire la population en 2005. On calcule $f(2005) = 275\,695 \times 2005 - 490\,759\,659 = 62\,008\,816$. Selon ce modèle, la population française en 2005 est de 62 008 816 habitants.

En réalité, nous savons (d'après Insee (2020)) que la population française en 2005 était de 62 730 537 habitants, ce qui représente une différence de 721 721 habitants par rapport au modèle, soit environ 1%.

🔥 Utilisation de la calculatrice Numworks

Pour obtenir l'équation de la droite de régression à l'aide de la calculatrice Numworks.

- Accéder à l'outil "Régression".
- Entrer les valeurs de x et y dans les deux tableaux.
- Aller dans l'onglet "Graphique" : le nuage de points s'affiche.
- Activer la commande "Régression" et choisir "Linéaire" : la droite est maintenant tracée à l'écran.
- Pour voir et recopier l'équation de cette droite, appuyer sur la touche "OK".



Sources utilisées

Insee. 2020. « Bilan démographique 2019 ». 2020. <https://www.insee.fr/fr/statistiques/1892117?sommaire=1912926>.

Wikipédia. 2023. « Démographie de Paris ». 2023. https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9mographie_de_Paris.